

CONCURSUL JUDEȚEAN DE MATEMATICĂ DAN BARBILIAN

EDIȚIA a XXIII-a - HOREZU - 20.05.2026

CLASA a V-a

Problema 1. (20p)

- Efectuați: $(2 + 4 + 6 + \dots + 2026 - 1013 \cdot 1014) : 2$
- Scrieți numărul 5^{2026} ca sumă de două pătrate perfecte.

Problema 2. (25p) Fie numărul natural $n = 7 + 7^2 + 7^3 + \dots + 7^{2025}$

- Arătați că numărul 7^{2026} dă prin împărțire la 6 și prin împărțire la 48 același rest.
- Aflați ultimele două cifre ale numărului $6n$.

Problema 3. (20p) Elena și-a propus să citească o carte în patru zile: în prima zi a citit o pătrime din numărul paginilor cărții, a doua zi a citit o cincime din numărul paginilor rămase, a treia zi a citit o treime din ce mai avea de citit, iar a patra zi a citit ultimele 48 de pagini. Câte pagini are cartea Elenei?

Problema 4. (25p) Un număr se numește “moderat” dacă suma cifrelor sale este egală cu numărul său de cifre, de exemplu, numărul 102 este “moderat” pentru că $1+0+2 = 3$, iar 102 are 3 cifre.

- Scrieți toate numerele “moderate” de trei cifre;
- Determinați diferența dintre cel mai mare număr „moderat“ care are 19 cifre și cel mai mic număr „moderat“ de 19 cifre.

Notă: Toate problemele sunt obligatorii!

Timp de lucru 2 ore!

Se acordă 10p din oficiu!

CONCURSUL JUDEȚEAN DE MATEMATICĂ DAN BARBILIAN

EDIȚIA a XXIII-a - HOREZU - 20.05.2026

CLASA a V-a - Barem de corectare

Problema 1. (20p)

a) Efectuați: $(2 + 4 + 6 + \dots + 2026 - 1013 \cdot 1014) : 2$

b) Scrieți numărul 5^{2026} ca sumă de două pătrate perfecte.

Soluție: a) $(2 + 4 + 6 + \dots + 2026 - 1013 \cdot 1014) : 2 = \dots = [2 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 1013) - 1013 \cdot 1014] : 2 \dots\dots\dots 2p$

$= \left(2 \cdot \frac{1013 \cdot 1014}{2} - 1013 \cdot 1014 \right) : 2 \dots\dots\dots 3p$

$= (1013 \cdot 1014 - 1013 \cdot 1014) : 2 \dots\dots\dots 2p$

$= 0 : 2 = 0 \dots\dots\dots 3p$

b) $5^{2026} = 5^{2024} \cdot 5^2 = \dots\dots\dots 2p$

$= 5^{1013 \cdot 2} \cdot 25 = (5^{1013})^2 \cdot (4^2 + 3^2) \dots\dots\dots 5p$

$= (5^{1013} \cdot 4)^2 + (5^{1013} \cdot 3)^2 \dots\dots\dots 3p$

Problema 2. (25p) Fie numărul natural $n = 7 + 7^2 + 7^3 + \dots + 7^{2025}$

a) Arătați că numărul 7^{2026} dă prin împărțire la 6 și prin împărțire la 48 același rest.

b) Aflați ultimele două cifre ale numărului $6n$.

Soluție: a) $7n = 7^2 + 7^3 + 7^4 + \dots + 7^{2026} \dots\dots\dots 2p$

$6n = 7n - n = 7^{2026} - 7 \dots\dots\dots 3p$

$7^{2026} = 6n + 7 = 6n + 6 + 1 = 6(n+1) + 1 \dots\dots\dots 3p$

deci restul împărțirii lui 7^{2026} la 6 este 1 $\dots\dots\dots 2p$

$n = 7 + 7^2 + 7^3 + \dots + 7^{2025} = 7 + 7^2(1 + 7) + 7^4(1 + 7) + \dots + 7^{2024}(1 + 7) \dots\dots\dots 1p$

$n = 7 + 7^2 \cdot 8 + 7^4 \cdot 8 + \dots + 7^{2024} \cdot 8 \Leftrightarrow n = 7 + 8 \cdot (7^2 + 7^4 + \dots + 7^{2024}) \dots\dots\dots 1p$

$\Leftrightarrow n = 7 + 8p$, unde $p = 7^2 + 7^4 + \dots + 7^{2024}$

$\dots\dots\dots 1p$

$7^{2026} = 6n + 7 = 6(8p + 7) + 7 = 48p + 42 + 7 = 48p + 49 = 48p + 48 + 1 = 48(p + 1) + 1 \dots\dots\dots 1p$

deci restul împărțirii lui 7^{2026} la 48 este 1 $\dots\dots\dots 1p$

b) Notăm $u_2(x)$ = ultimele două cifre ale lui x

$u_2(7^{4k}) = 01, u_2(7^{4k+1}) = 07, u_2(7^{4k+2}) = 49, u_2(7^{4k+3}) = 43 \dots\dots\dots 5p$

$u_2(7^{2026}) = u_2(7^{4 \cdot 506 + 2}) = 49$, deci $u_2(7^{2026} - 7) = u_2(49 - 7) = 42 \dots\dots\dots 5p$

Problema 3. (20p) Elena și-a propus să citească o carte în patru zile: în prima zi a citit o pătrime

din numărul paginilor cărții, a doua zi a citit o cincime din numărul paginilor rămase, a treia zi a

citit o treime din ce mai avea de citit, iar a patra zi a citit ultimele 48 de pagini. Câte pagini are

cartea Elenei?

Soluție:

Metoda I: $48 : 2 = 24$ pagini a citit a treia zi $\dots\dots\dots 3p$

$24 \cdot 3 = 72$ rămase după a doua zi $\dots\dots\dots 3p$

$72 : 4 = 18$ pagini a citit a doua zi $\dots\dots\dots 3p$

$18 \cdot 5 = 90$ pagini rămase după prima zi $\dots\dots\dots 3p$

$90 : 3 = 30$ pagini a citit prima zi $\dots\dots\dots 3p$

$$30 \cdot 4 = 120 \text{ pagini are cartea} \dots\dots\dots 5p$$

Metoda a II-a:

Notăm cu x numărul total de pagini

I-a zi a citit $\frac{x}{4}$ pagini, rest $\frac{3x}{4}$ 5p

a II-a zi a citit $\frac{1}{5} \cdot \frac{3x}{4} = \frac{3x}{20}$ pagini, rest $\frac{4}{5} \cdot \frac{3x}{4} = \frac{12x}{20} = \frac{3x}{5}$ rest5p

a III-a zi a citit $\frac{1}{3} \cdot \frac{3x}{5} = \frac{x}{5}$ pagini, rest $\frac{2}{3} \cdot \frac{3x}{5} = \frac{2x}{5}$ rest5p

a IV-a zi a citit 48 de pagini, deci $\frac{2x}{5} = 48 \Leftrightarrow x = 120$ pagini5p

Problema 4. (25p) Un număr se numește “moderat” dacă suma cifrelor sale este egală cu numărul său de cifre, de exemplu, numărul 102 este “moderat” pentru că $1+0+2 = 3$, iar 102 are 3 cifre.

- a) Scrieți toate numerele “moderate” de trei cifre;
- b) Determinați diferența dintre cel mai mare număr „moderat“ care are 19 cifre și cel mai mic număr „moderat“ de 19 cifre.

Soluție:

a) $3 = 3+0+0 \Rightarrow 300$ este “moderat”1p

$3 = 2+1+0 \Rightarrow 210, 201, 102, 120$, sunt “moderate”4p

$3 = 1+1+1 \Rightarrow 111$ este “moderat”1p

În total sunt 6 numere “moderate”4p

b) Vom folosi cât mai mulți de 9 și cum $19 = 9 \cdot 2 + 1$

cel mai mare număr “moderat” de 19 cifre este 991000...00,5p
(2 cifre de 9, o cifră 1 și 16 cifre de 0)

cel mai mic număr „echilibrat“ de 19 cifre va fi 1 000...0099,5p
(o cifră 1, 16 cifre de 0 și 2 cifre de 9)

Diferența este: 991000...00000 -

$$\underline{100000...00099}$$

$$890999...99901$$

(o cifră 8, o cifră 9, o cifră 0, 14 cifre de 9, o cifră 0, o cifră 1)5p